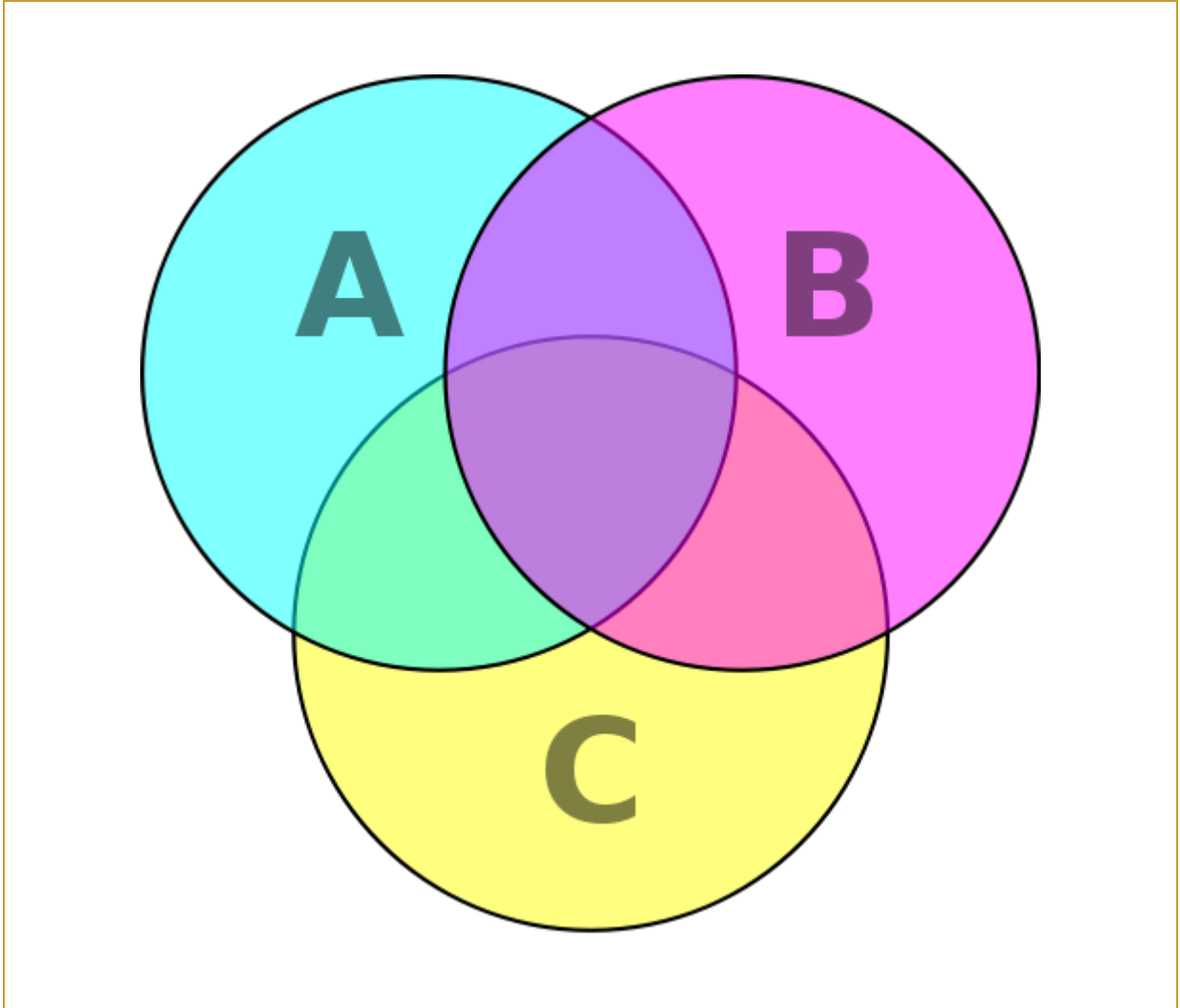


KÜMELER



05/12/2011

KÜME NEDİR?	2
KÜMELERİN ÖZELLİKLERİ	2
KÜMELERİN GÖSTERİLİŞİ	2
EŞİT KÜME, DENK KÜME	3
EŞİT OLMAYAN (FARKLI) KÜMELER.....	3
BOŞ KÜME.....	3
ALT KÜME - ÖZALT KÜME	4
KÜMELERDE İŞLEMLER	5
KÜMELERLE İLGİLİ PROBLEMLER.....	15

Küme Nedir?

Canlı veya cansız varlıkların bir araya gelerek oluşturdukları topluluğa küme denir. Bir başka deyişle; nesnelere iyi tanımlanmış listesidir.

Kümelerin Özellikleri

1) Kümeler büyük harflerle gösterilir.

Örnek : $A = \{2, 3, 4, 5\}$

Örnekte verilen A kümesi büyük harfle yazılmıştır.

2) Küme içine yazılan bir eleman, birden fazla yazılamaz.

Örnek : $A = \{2, 3, 4, 4, 5\}$

3) Küme içindeki elemanların yerlerinin değişmesi kümeyi değiştirmez.

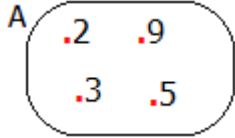
Örnek : Bir A kümesi;

$A = \{5, 7, 9, 11\}$ veya $A = \{11, 7, 9, 5\}$ şeklinde yazılabilir.

4) Liste yöntemi kullanılarak yazılan küme elemanları virgüllerle ayrılır.

Örnek : $B = \{a, b, c, d, e\}$

5) Şema yöntemi kullanılarak hazırlanan kümelerde, her elemanın başına nokta konur.



KÜMELERİN GÖSTERİLİŞİ

Kümenin elemanları aşağıdaki 3 yolla gösterilebilir.

1. Liste Yöntemi

Kümenin elemanları $\{ \}$ sembolü içine, her bir elemanın arasına virgül konularak yazılır.

$A = \{a, b, c\}$ ise, $s(A) = 3$ tür.

2. Ortak Özellik Yöntemi

Kümenin elemanlarını; daha somut ya da daha kolay algılanır biçimde, gerektiğinde sözel, gerektiğinde matematiksel bir ifade olarak ortaya koyma biçimidir.

$A = \{x : (x \text{ in özeliği})\}$

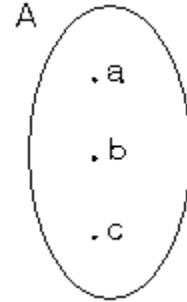
Burada "x :" ifadesi "öyle x lerden oluşur ki" diye okunur.

Bu ifade "x |" biçiminde de yazılabilir.

3. Venn Şeması Yöntemi

Küme, kapalı bir eğri içinde her eleman bir nokta ile gösterilip noktanın yanına elemanın adı yazılarak gösterilir.

Bu gösterime Venn Şeması ile gösterim denir.



EŞİT KÜME, DENK KÜME

Aynı elemanlardan oluşan kümelere **eşit kümeler** denir. Eleman sayıları eşit olan kümelere **denk kümeler** denir.

A kümesi B kümesine eşit ise $A = B$,

C kümesi D kümesine denk ise $C \sqsupseteq D$ dir.

Eşit olan kümeler aynı zamanda denktir. Fakat denk kümeler eşit olmayabilir.

EŞİT OLMAYAN (FARKLI) KÜMELER

Tamamen aynı elemanlardan oluşmayan kümelere **eşit olmayan (farklı)** kümeler denir.

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, d\}$ ise $A \not\sqsupseteq B$ dir.

$A = \{1, b, 7\}$, $B = \{a, 2, d, 5\}$ ise $A \not\sqsupseteq B$ dir.

BOŞ KÜME

Hiç bir elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir.

Boş küme $\{ \}$ ya da \square sembolleri ile gösterilir.

Eşit olan kümeler aynı zamanda denktir. Fakat denk kümeler eşit olmayabilir. $\{.\}$ ve $\{0\}$ kümeleri boş küme olmayıp birer elemana sahip iki denk kümedir.

$\{ \square \}$ ve $\{0\}$ kümeleri boş küme olmayıp birer elemana sahip iki denk kümedir.

ALT KÜME - ÖZALT KÜME

1. Alt Küme

A kümesinin her elemanı, B kümesinin de elemanı ise A ya B nin **alt kümesi** denir.

A kümesi B kümesinin alt kümesi ise $A \subseteq B$ biçiminde gösterilir.

A kümesi B kümesinin alt kümesi ise B kümesi A kümesini kapsıyor denir. $B \supseteq A$ biçiminde gösterilir.

C kümesi D kümesinin alt kümesi değilse $C \not\subseteq D$ biçiminde gösterilir.

2. Özalt Küme

Bir kümenin, kendisinden farklı bütün alt kümelerine o kümenin **özalt kümeleri** denir.

3. Alt Kümenin Özellikleri

i) Her küme kendisinin alt kümesidir.

$$A \subseteq A$$

ii) Boş küme her kümenin alt kümesidir.

$$\emptyset \subseteq A$$

iii) $(A \subseteq B \text{ ve } B \subseteq A) \Rightarrow A = B$ dir.

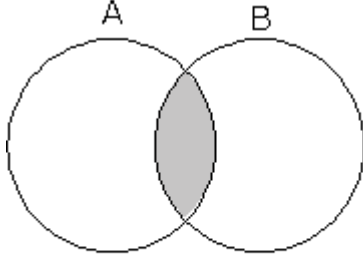
iv) $(A \subseteq B \text{ ve } B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ dir.

v) n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n ve özalt kümelerinin sayısı $2^n - 1$ dir.

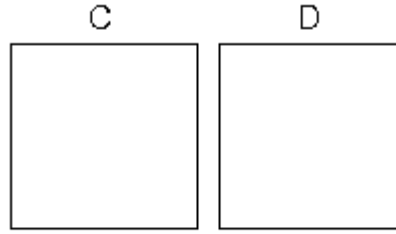
KÜMELERDE İŞLEMLER

1-Kümelerde Kesişim

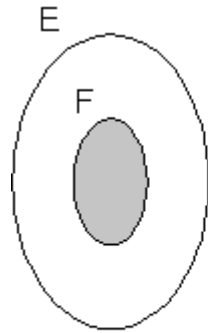
A ve B kümesinin ortak elemanlarından oluşan kümeye A ile B nin kesişim kümesi denir ve $A \cap B$ biçiminde gösterilir.



$A \cap B$ kümesi
taralı bölgedir.



$C \cap D = \emptyset$
C ile D ayrık kümelerdir.



$F \subset E \Rightarrow E \cap F = F$ olur.

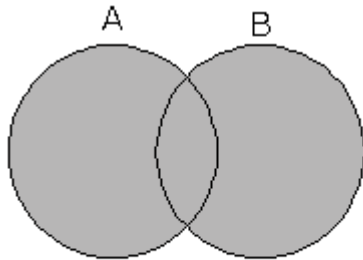
$E \cap F$ kümesi
taralı bölgedir.

Kesişimin Özellikleri

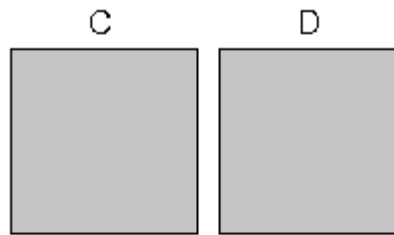
- $A \cap A = A$
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

2-Kümelerde Birleşim

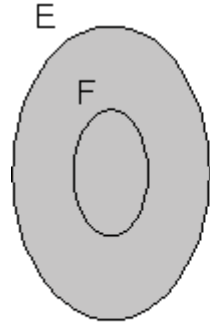
A kümesindeki ve B kümesindeki bütün elemanların oluşturduğu kümeye bu iki kümenin birleşim kümesi denir ve $A \cup B$ biçiminde gösterilir.



$A \cup B$ kümesi
taralı bölgedir.



$C \cup D$ kümesi
taralı bölgedir.



$E \supset F \Rightarrow E \cup F = E$ olur.

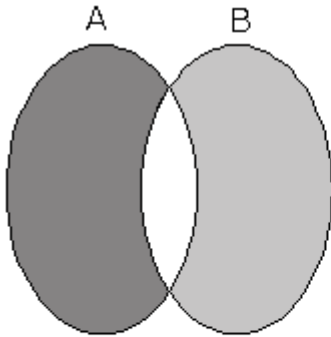
$E \cup F$ kümesi
taralı bölgedir.

Birleşimin Özellikleri

- $A \cup A = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
- $A \cap B$ ise, $A \cup B = B$
- $A \cup B = A$ ise, ($A = A$ ve $B = \emptyset$) dir.

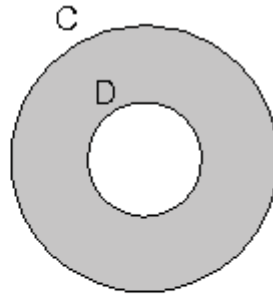
3-İki Kümenin Farkı

A kümesinde olup, B kümesinde olmayan elemanların kümesine A fark B kümesi denir. A fark B kümesi $A - B$ ya da $A \setminus B$ biçiminde gösterilir.



■ $A - B$ kümesi
taralı bölgedir.

■ $B - A$ kümesi
taralı bölgedir.



$C - D$ kümesi
taralı bölgedir.

• Tümlleme işlemi:

Elimizde birkaç tane küme olsun. Bizden istenen kümenin dışında kalan tüm elemanlara tümlleyen elemanlar denir. Yani tamamlayan anlamındadır. Tümlleyen sembolü kümenin harfinin üzerine konan kesme işareti şeklindedir.

$A = \{\text{sarı, kırmızı, mor, lacivert, gri}\}$

$B = \{\text{beyaz, sarı, turuncu, gri, mavi, yeşil}\}$

A/B nin tümleyeni sorulsun bize.

$A/B = \{\text{kırmızı, mor, lacivert}\}$ bu bize A/B yi verir. Bizden istenen ise A/B nin tümleyenidir. Yani A/B nin dışında kalan bütün elemanlardır.

A/B nin tümleyeni = $(A/B)' = \{\text{sarı, gri, beyaz, turuncu, mavi, yeşil}\}$ olarak yazılabilir. Daha net anlaşılması için en altta görsel hale getirilmiştir.

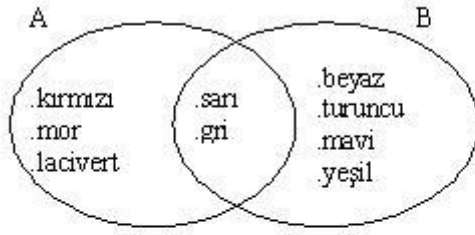
A' bu da A nın tümleyeni demektir

Eleman sayısı nasıl gösterilir: Bir kümenin elemanlarını tek tek yazmayı öğrendik, peki toplam kaç tane elemanı var diye sorulursa nasıl gösterebiliriz ?

Kümenin elemanlarını sayıyoruz, örneğin kümemizin 10 elemanı olsun. Kümenin adı da A olsun.

$S(A) = 10$ olarak gösterim yapılır.

Şimdi bunların hepsini görsel hale getirelim.



1) Kesişim İşlemi

$$A \cap B = \{sarı, gri\}$$

2) Birleşim İşlemi

$$A \cup B = \{kırmızı, mor, lacivert, sarı, gri, beyaz, turuncu, mavi, yeşil\}$$

3) Fark işlemi

$$A / B = \{kırmızı, mor, lacivert\}$$

$$B / A = \{beyaz, turuncu, mavi, yeşil\}$$

4) Tümlene işlemi:

$$(A / B)' = \{kırmızı, mor, lacivert\}'$$

Kırmızı, mor ve lacivert dışında kalan tüm Elemanlar anlamına gelir.

O halde;

$$(A / B)' = \{sarı, gri, beyaz, turuncu, mavi, yeşil\}$$

5) Alt Küme:

$$A = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$B = \{3, 5\}$$

Yukarıda görüldüğü gibi B kümesindeki

Her eleman A kümesinde de vardır.

O halde $B \subset A$ şeklinde yazılır. B kümesi, A

Kümesinin alt kümesidir diye okunur.

6) Eleman sayısı:

$$s(A) = 5 \quad \text{sbs-matematik.com}$$

$$s(B) = 2$$

$$s(A \cap B) = 2$$

$$s(A \cup B) = 5$$

ALİŞTIRMALAR

1. $A = \{ Mart , Mayıs \}$ ise

A kümesini ortak özellik yöntemi ve venn şeması yöntemiyle gösterin.

2. $A = \{ 3 , 5 , \{ a , b , c \} , 7 , \{ e , f \} , g \}$

$B = \{ k , l , m , n , v , y , z \}$

$C = \{ 10 , 12 , 14 , 16 , 18 , \{ 20 , 22 \} , 24 \}$

ise $s(A)$, $s(B)$ ve $s(C) = ?$

3. $A = \{ Emin, Erkut \{ Esen, Erkan \} , Elif ,Ecrin \}$

ise aşağıdakilerden hangileri doğrudur ?

$\{ \text{Emin} \} \subset A$

$s(A) = 6$

$\{ \text{Elif, Ecrin} \} \subset A$

$\{ \text{Esen, Erkan} \} \subset A$

$\{ \text{Esen, Erkan} \} \in A$

4. $A = \{ 14 \text{ den küçük tek doğal sayılar} \}$

$B = \{ 20 \text{ den küçük } 3 \text{ e tam bölünen sayma sayıları} \}$

Buna göre $s(A \cap B)$ kaçtır ?

5. **GÖKHAN** kelimesindeki harfler A kümesini, **ERKAN** kelimesindeki harfler ise B kümesini oluşturuyor. Buna göre $s(A \cup B)$ kaçtır ?

6. $s(A-B) = 7$ $s(B-A) = 14$

$s(A \cup B) = 30$ ise $s(A \cap B)$ kaçtır ?

7. 40 kişilik bir sınıfta öğrencilerin her biri basketbol ve satranç kurslarından en azından birine katılmaktadır. 33 kişi basketbol, 17 kişi de satranç kursuna gittiğine göre , her iki kursa da giden kişi sayısı kaçtır ?

Başarılar

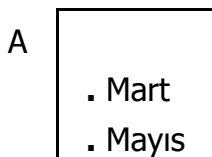
Soruları çözmeye çalışmadan cevaplara bakarsanız, kendinizi geliştiremeyeceğinizi unutmayın

ÇÖZÜMLER

1. A kümesindeki elemanlar M ile başlayan aylardır. Buna göre A kümesini liste yöntemiyle ;

$A = \{ M \text{ harfiyle başlayan aylar} \}$ olarak gösterebiliriz.

A kümesini venn şemasıyla ;



Şeklinde gösterebiliriz.

2. A kümesinin elemanlarını tek tek sayalım;

$$A = \{ 3, 5, \{ a, b, c \}, 7, \{ e, f \}, g \}$$

1 2 3 4 5 6

Buna göre $s(A) = 6$ dir.

B kümesinin elemanlarını sayalım ;

$$B = \{ k, l, m, n, v, y, z \}$$

1 2 3 4 5 6 7

Buna göre $s(B) = 7$ dir.

C kümesinin elemanlarını sayalım ;

$$C = \{ 10, 12, 14, 16, 18, \{ 20, 22 \}, 24 \}$$

1 2 3 4 5 6 7

3. $\{ \text{Emin} \} \subset A$ **DOĞRUDUR.**

Çünkü Emin A kümesinin 1 elemanlı alt kümelerindedir.

NOT : Alt küme gösteriminde eleman $\{ \}$ içinde gösterilmelidir.

$s(A) = 6$ **YANLIŞTIR** $s(A) = 5$ dir.

$$\{ \text{Emin}, \text{Erkut} \{ \text{Esen}, \text{Erkan} \}, \text{Elif}, \text{Ecrin} \}$$

1 2 3 4 5

$\{ \text{Elif}, \text{Ecrin} \} \subset A$ **DOĞRUDUR**

$\{ \text{Elif}, \text{Ecrin} \}$ A kümesinin 2 elemanlı alt kümelerindedir.

$\{ \text{Esen}, \text{Erkan} \} \subset A$ **YANLIŞTIR**

Çünkü elemanın kendisi $\{ \text{Esen}, \text{Erkan} \}$ dir. Bu elemanın alt küme olarak gösterimi ;

$\{ \{ \text{Esen}, \text{Erkan} \} \} \subset A$ olmalıydı.

$\{ \text{Esen}, \text{Erkan} \} \in A$ **DOĞRUDUR.**

4. $A = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 \}$

$$B = \{ 3, 6, 9, 12, 15, 18 \}$$

$$(A \cap B) = \{ 3, 9 \}$$

$s(A \cap B) = 2$ dir..

5. $A = \{ G, Ö, K, H, A, N \}$

$$B = \{ E, R, K, A, N \}$$

$$(A \cup B) = \{ G, \ddot{O}, K, H, A, N, E, R \}$$

$$s(A \cup B) = 8 \text{ dir.}$$

$$6. s(A \cup B) = s(A-B) + s(B-A) + s(A \cap B) \text{ dir.}$$

Buna göre ;

$$30 = 7 + 14 + s(A \cap B)$$

$$30 = 21 + s(A \cap B)$$

$$s(A \cap B) = 9 \text{ dur.}$$

$$7. s(B \cup S) = 40 \text{ dir.}$$

$$s(B) = 33$$

$$s(S) = 17$$

$$s(B \cup S) = s(B) + s(S) - s(B \cap S)$$

$$40 = 33 + 17 - s(B \cap S)$$

$$40 = 50 - s(B \cap S)$$

$$s(B \cap S) = 10$$

SORULAR

1) $A = \{ 5, 10, \{ 15 \}, 20, \{ 25, 30 \}, 35 \}$ kümesi için aşağıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur ?

- $s(A) = 7$
- $5 \in A$
- $25 \in A$
- $10 \subset A$
- $\{15\} \subset A$
- $\{ 20 \} \subset A$

2) $s(A/B) = 3$, $s(B/A) = 4$ ve $s(A \cap B) \neq 0$ ise $s(A \cup B)$ en az kaçtır ?

3) 26 kişilik bir sınıfta öğrencilerin her biri İngilizce ve satranç kurslarından en az birine gitmektedir. İngilizce kursuna giden öğrenci sayısı 19, satranç kursuna giden öğrenci sayısı ise 12 ise kaç kişi her iki kursa da gitmektedir ?

4) $A \cup B = \{ 1, 2, 5, 8, 9, 11 \}$

$A \cup C = \{ 1, 3, 4, 5, 8, 13 \}$

ve B ve C **ayrık** iki kümeysse

ise A kümesinin eleman sayısı kaçtır ?

5) $s(A \cup B) = 25$, $s(A/B) = 8$ ve $s(B/A) = 15$ ise

$s(A \cap B)$ kaçtır ?

6) $s(A \cup B) = 7 s(A \cap B)$ ve $s(A/B) = 2 s(B/A)$ ve $s(A \cap B) = 3$ ise

$s(A/B) = ?$

7) $A = \{ 13 \text{ den küçük } 2 \text{ nin tam katı olan doğal sayılar} \}$

$B = \{ 13 \text{ den küçük } 3 \text{ ün tam katı olan doğal sayılar} \}$

ise $s(A') + s(B')$ kaçtır ?

ÇÖZÜMLER

1) $A = \{ 5, 10, \{ 15 \}, 20, \{ 25, 30 \}, 35 \}$ kümesinin her bir elemanını farklı renklendirdik..

- $s(A) = 7$ **yanlıştır**, çünkü A kümesinin eleman sayısı **6** dır.
- $5 \in A$ **doğrudur**.
- $25 \in A$ **yanlıştır**, çünkü $\{ 25, 30 \}$ başlı başına bir elemandır.
- $10 \subset A$ **yanlıştır**, çünkü alt küme gösteriminde eleman $\{ \}$ içinde gösterilmelidir. Doğru gösterim **$\{ 10 \} \subset A$** dır.
- $\{ 15 \} \subset A$ **yanlıştır**, çünkü elemanın kendisi $\{ 15 \}$ dir, bu elemanı tekrar $\{ \}$ içine almak gerekirdi. Yani doğru yazılım **$\{ \{ 15 \} \} \subset A$** dır.

- $\{ 20 \} \subset A$ ifadesi **doğrudur.**

Yani şıklarımızın sadece 2 tanesi doğrudur.

- 2)** Soruda $s(A \cap B) \neq 0$ dediğine göre kesişim kümesinin en az 1 elemanı vardır.

Buna göre birleşim kümesinin en küçük değerini ;

$$s(A \cup B) = s(A/B) + s(B/A) + s(A \cap B) \text{ formülünden}$$

$$s(A \cup B) = 3 + 4 + \mathbf{1} = \mathbf{8} \text{ olarak buluruz.}$$

- 3)** İngilizce kursuna gidenler kümesine $\mathbf{İ}$, satranç kursuna gidenler kümesine de \mathbf{S} diyelim.

Toplam öğrenci sayısını bulmak için İngilizce kursuna gidenlerle Satranç kursuna gidenlerin sayısını toplar her ikisine de giden sayısından çıkarmamız gerekir.

$$s(\mathbf{İ} \cup \mathbf{S}) = s(\mathbf{İ}) + s(\mathbf{S}) - s(\mathbf{İ} \cap \mathbf{S})$$

Biz, toplam öğrenci sayısını, İngilizce kursuna giden öğrenci sayısını ve Satranç kursuna giden öğrenci sayısını biliyoruz. Bunları yerine koyarsak her iki kursa giden öğrenci sayısını buluruz.

$$26 = 19 + 12 - (\mathbf{İ} \cap \mathbf{S})$$

$$26 = 31 - (\mathbf{İ} \cap \mathbf{S})$$

$$(\mathbf{İ} \cap \mathbf{S}) = \mathbf{5}$$

4) $A \cup B = \{ \mathbf{1}, 2, \mathbf{5}, \mathbf{8}, 9, 11 \}$

$$A \cup C = \{ \mathbf{1}, 3, 4, \mathbf{5}, \mathbf{8}, 13 \}$$

A her iki birleşim kümesinde de olduğu için her iki kümede de ortak elemanları bulduğumuzda A'nın elemanlarını bulmuş oluruz. **1, 5 ve 8** in her iki birleşim kümesinde olduğunu görüyoruz. Buna göre A'nın eleman sayısı **3** dür.

- 5)** $s(A \cup B) = s(A/B) + s(B/A) + s(A \cap B)$ formülünden

$$25 = 8 + 15 + s(A \cap B)$$

$$25 = 23 + s(A \cap B)$$

$$s(A \cap B) = 2 \text{ dir.}$$

6) Bize soruda $s(A \cap B) = 3$ ve $s(A \cup B) = 7 s(A \cap B)$ veriliyor.

3 ü $s(A \cap B)$ yerine koyarsak ;

$$s(A \cup B) = 7 \times 3 = 21 \text{ olur.}$$

Bize soruda $s(A/B) = 2 s(B/A)$ da veriliyor.

$s(B/A)$ ye \square dersek $s(A/B) = 2\square$ olur.

$s(A \cup B) = s(A/B) + s(B/A) + s(A \cap B)$ formülünden

$$21 = 2\square + \square + 3$$

$$21 = 3\square + 3$$

$$18 = 3\square$$

$$\square = 6$$

Bize $s(A/B)$ yi soruyordu, $s(A/B) = 2\square$ ile ifade edildiğinden ;

$$s(A/B) = \underline{12} \text{ olur.}$$

7) $A = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12 \}$

$$B = \{ 3, 6, 9, 12 \}$$

$$A' = \{ 3, 9 \} \quad s(A') = 2 \quad [[A \text{ kümesinde olmayan sayısı }]]$$

$$B' = \{ 2, 4, 8, 10 \} \quad s(B') = 4 \quad [[B \text{ kümesinde olmayan sayısı }]]$$

$$s(A') + s(B') = 2 + 4 = 6 \text{ olur.}$$

KAYNAKÇA:

<http://www.gencmatematik.net/6-sinif/6-sinif-kumeler-konu-anlatimi.html>

<http://www.sifirhoca.com/6-sinif-konu-anlatimi/kumelerle-islemler.html>

<http://sinavlarahazirlan.blogcu.com/6-sinif-kumeler-ile-ilgili-alistirmalar-ve-cozumleri/9052755>

<http://odevistan.blogcu.com/kumeler-6-sinif/11462074>

<http://matematik100.com/kumeler-konu-anlatimi>

<http://matematikk.blogcu.com/kumeler-konu-anlatim/2604006>